Ad-Soyad :

Numara :

1	2	3	4	5	6	7	8	Toplam

19.01.2020

2019-2020 Güz Dönemi ANALİZ III (A-B) Bütünleme Sınavı Soruları

1. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı

$$\|x\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad \|x\|_\infty = maks\left\{ |x_i| \,:\, 1 \leq i \leq n \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

normları için $\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$ eşitsizliğinin varlığını gösteriniz.

2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$ olmak üzere (f_n) dizisinin $(0,2)$ aralığı üzerinde düzgün yakınsak olup olmadığını araştırınız.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n^2\, 2^n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!-1}$ serisinin karakterini bulunuz.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$ serinin karakterini bulunuz. Eğer seri yakınsaksa toplamını hesaplayınız.

6. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{9+6x}{\left(3x+x^2\right)^2} dx$ integralinin bir has olmayan integral olup olmadığını değerlendiriniz. Bu integralin karakterini belirleyiniz ve Cauchy esas değerini bulunuz.

7. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<1, y>2\}\subset\mathbb{R}^2$ altkümesinin açık veya kapalı küme olup olmadığını belirleyiniz. İçini, dışını ve sınırını bulunuz.

8. Eğer (f_n) dizisi bir $E\subset\mathbb{R}$ altkümesi üzerinde sınırlı olan fonksiyonların bir dizisi ve E üzerinde $f_n\to f$ (düzgün) ise o zaman f fonksiyonu E üzerinde sınırlıdır. İspatlayınız.

Not: Süre 110 dakikadır. Sorular eşit puanlıdır.

BAŞARILAR….

Prof. Dr. Cenap DUYAR - Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

1. Defterinizde var.

2. Eğer $0<x<1$ ise

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1+x^n}=1,$$

$x=1$ ise

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1+x^n}=0$$

ve $1<x<2$ ise

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1+x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(\frac{1}{x^n}-1\right)}{x^n\left(\frac{1}{x^n}+1\right)}=-1$$

bulunur. Yani $(f_n)_{n\in IN}$ dizisi noktasal olarak

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & x=1 \\ -1, & 1<x<2 \end{cases}$$

fonksiyonuna yakınsar. Ancak f fonksiyonu sürekli olmadığından $(f_n)_{n\in IN}$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

3. Dalembert Oran testi gereğince

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{(n+1)^2\,2^{n+1}}\frac{n^2\,2^n}{(-1)^n(x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2(n+1)^2}|x-1|=\frac{|x-1|}{2}$$

olup, $\frac{|x-1|}{2}<1$ ise yani $-1<x<3$ ise seri yakınsaktır. Ayrıca $x=-1$ için seri

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2)^n}{n^2\,2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

olup, seri yakınsaktır. Yine $x=3$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n^2 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

olup, seri Leibnitz testi gereğince yakınsaktır. O halde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-1)^n}{n^2 2^n}$ serisinin yakınsaklık aralığı $[-1,3]$ olur.

4. $a_n=\frac{1}{n!-1}$ dizisi azalan ve $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!-1}=0$ olduğundan verilen seri Leibnitz testi gereğince yakınsaktır.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3^n}{12^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4^n}{12^n}-\frac{3^n}{12^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ olup $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ serileri geometrik seri ve $\frac{1}{3}<1$, $\frac{1}{4}<1$ olduğundan yakınsaktır. Böylece verilen seri de yakınsaktır. Şimdi toplamını bulalım.

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4^k-3^k}{12^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4^k}{12^k}-\frac{3^k}{12^k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}$$

olup, $$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

bulunur.

6. Çözüm. $f(x)=\frac{9+6x}{(3x+x^2)^2}$ fonksiyonunu $[-1,1]$ aralığının sadece $x=0$ noktasında sınırsızdır,

böylece verilen integral bir has olmayan integraldir.

$\int\frac{9+6x}{(3x+x^2)^2}dx=\int\frac{3d(3x+x^2)}{(3x+x^2)^2}=-\frac{3}{3x+x^2}$ olması kullanılırsa,

$$\int_{-1}^{1}\frac{9+6x}{\left(3x+x^2\right)^2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{9+6x}{\left(3x+x^2\right)^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{9+6x}{\left(3x+x^2\right)^2}dx=\lim_{\lambda\to 0^+}\int_{-1}^{-\lambda}\frac{9+6x}{\left(3x+x^2\right)^2}dx$$

$$+\lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\lambda}^{1}\frac{9+6x}{\left(3x+x^2\right)^2}dx=\lim_{\lambda\to 0^+}\left[-\frac{3}{3x+x^2}\right]_{-1}^{-\lambda}+\lim_{\lambda\to 0^+}\left[-\frac{3}{3x+x^2}\right]_{\lambda}^{1}$$

$$=\lim_{\lambda\to 0^+}\left(-\frac{3}{-3\lambda+\lambda^2}-\frac{3}{2}\right)+\lim_{\lambda\to 0^+}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{3\lambda+\lambda^2}\right)=\infty-\infty$$

elde edilir ve buna göre verilen integral ıraksaktır.

$$e.d.\int_{-1}^{1}\frac{9+6x}{\left(3x+x^2\right)^2}dx=\lim_{\lambda\to 0^+}\left[\int_{-1}^{-\lambda}\frac{9+6x}{\left(3x+x^2\right)^2}dx+\int_{\lambda}^{1}\frac{9+6x}{\left(3x+x^2\right)^2}dx\right]$$

$$=\lim_{\lambda\to 0^+}\left(\left[-\frac{3}{3x+x^2}\right]_{-1}^{-\lambda}+\left[-\frac{3}{3x+x^2}\right]_{\lambda}^{1}\right)$$

$$=\lim_{\lambda\to 0^+}\left(-\frac{3}{-3\lambda+\lambda^2}-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{3\lambda+\lambda^2}\right)$$

$$=-\frac{9}{4}\lim_{\lambda\to 0^+}\left(\frac{3}{3\lambda+\lambda^2}-\frac{3}{-3\lambda+\lambda^2}\right)$$

$$=-\frac{9}{4}\lim_{\lambda\to 0^+}\left(-\frac{18}{(3+\lambda)\left(-3\lambda+\lambda^2\right)}\right)=-\infty$$

7- $\forall P=(x,y)\in A$ için $r=\min\{x,2-x,y-2\}$ alındığında $B_r(P)\subset A$ kapsaması gerçekleşir ve buna göre A bir açık kümedir. O halde A nın içi kendisidir, yani $A^\circ=A$ dır. A nın kapanışı

$$\bar{A}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,0\le x\le 1, y\ge 2\right\}$$

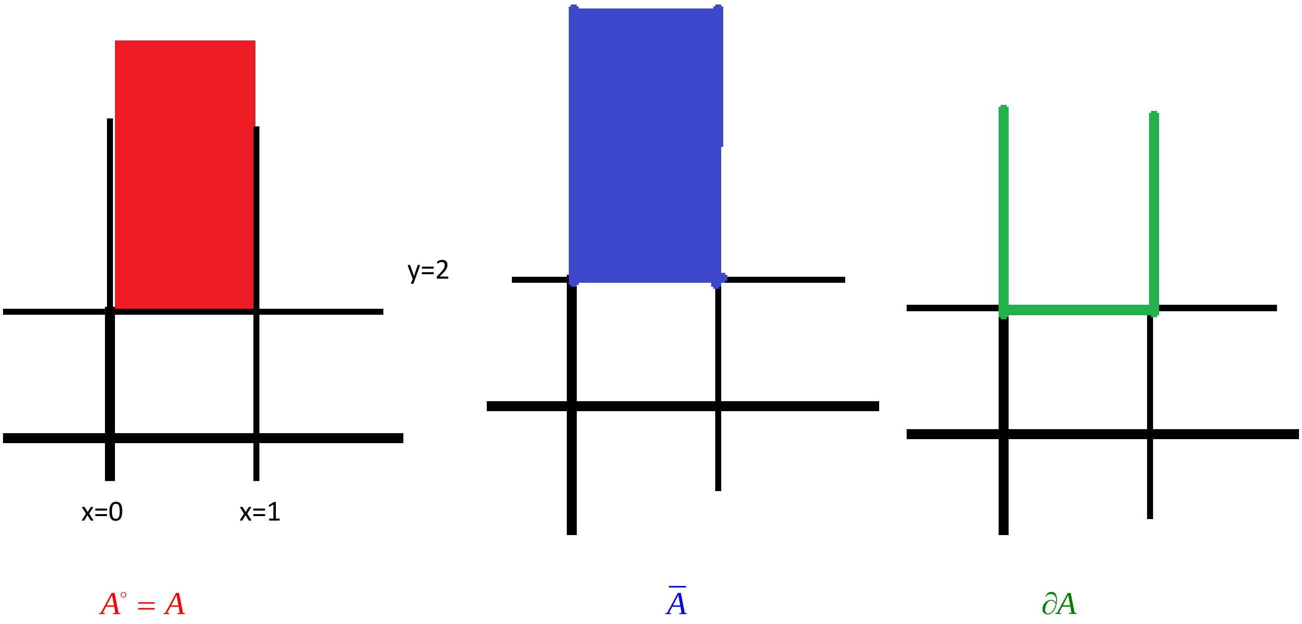
kümesidir, çünkü bu kapanış kümesinin

$$\mathbb{R}^2-\bar{A}=\mathbb{R}^2-\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,0\le x\le 1, y\ge 2\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x<0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x>1\right\}$$
$$\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,y<2\right\}$$

biçiminde olup, birleşimi oluşturan üç kümenin her birinin açık olduğu gösterilebilir, Böylece $\mathbb{R}^2-\bar{A}$ bir açık kümedir, aynı zamanda $\bar{A}$, A yı kapsayan en küçük kapalı küme olduğu kolayca görülür.

Bu $\mathbb{R}^2-\bar{A}$ kümesi *A* nın dışıdır.

A nın sınırı
$$\partial A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x=0, y\ge 2\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,0\le x\le 1, y=2\right\}$$
$$\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x=1, y\ge 2\right\}$$
olur.ı



8.Defterinizde var.